



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Spændings- og tøjningsbegrebet

differentialligninger for flytninger samt Eulersøjler

Hansen, F. Toft

Publication date:
1999

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Hansen, F. T. (1999). *Spændings- og tøjningsbegrebet: differentialligninger for flytninger samt Eulersøjler*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Nr. U9911

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

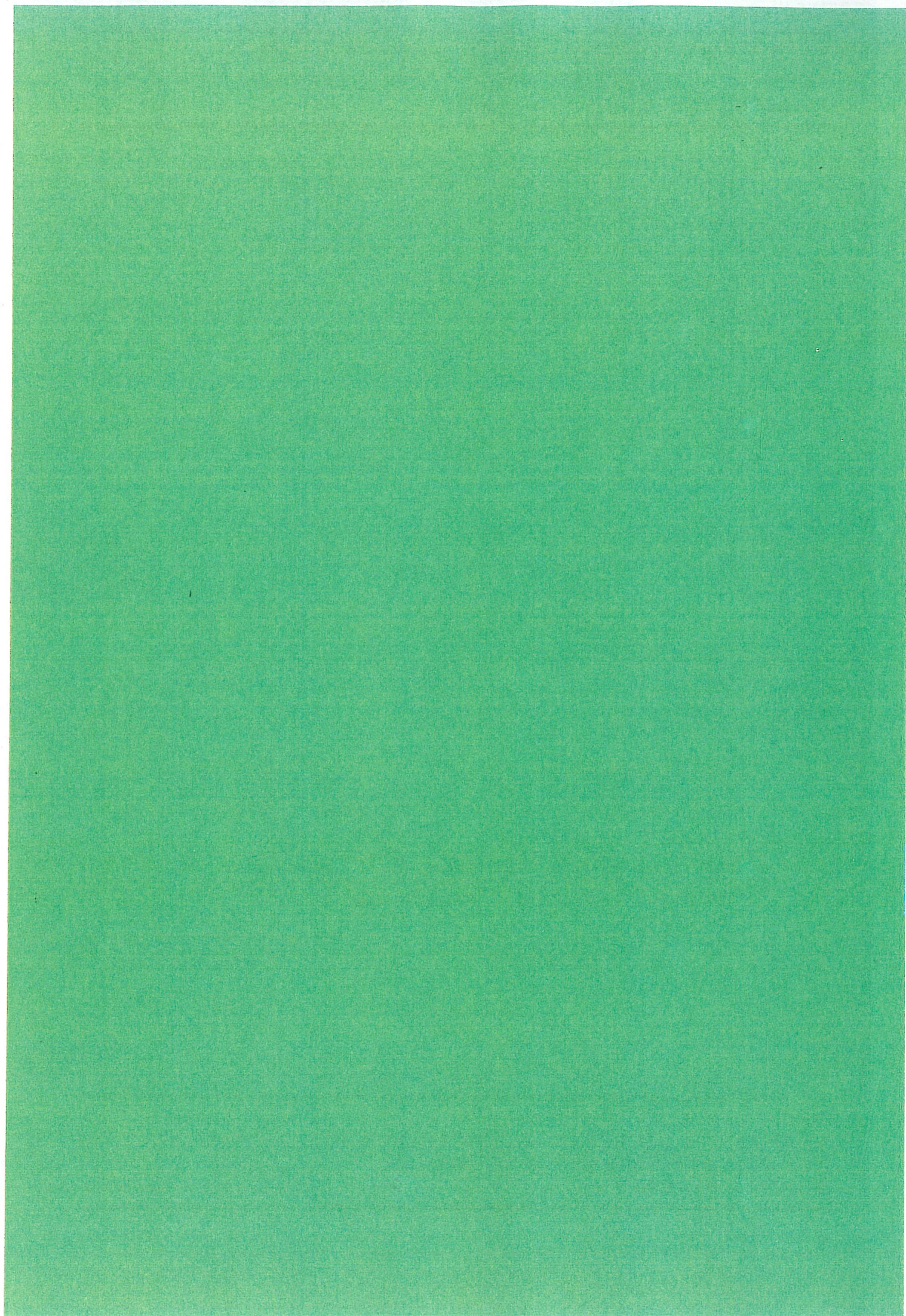
If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AAU • AALBORG • DANMARK

F. TOFT HANSEN
SPÆNDINGS- OG TØJNINGSBEGREBET, DIFFERENTIALLIGNINGER
FOR FLYTNINGER SAMT EULERSØJLER
SEPTEMBER 1999

ISSN 1395-8232 U9911



1. INDLEDNING

Dette hæfte er beregnet på B-sektorens 3. semester i kurset "Grundlæggende statik og styrkelære".

I afsnit 2-6 udledes tilnærmelsesformler for spændinger, tøjninger og flytninger i bjælker. Ved praktisk ingeniørarbejde er simple metoder til løsning af disse problemer af stor værdi, bl.a. fordi eksakte teorier er komplicerede at anvende.

Det er klart, at tilnærmelsesformler ikke kan blive lige gode for alle forekommende tilfælde, således at en vis forsigtighed må udvises ved formlernes anvendelse.

Betragtningerne indskrænkes her til plane, lige bjælker, dvs. bjælker med ret systemlinie og en symmetriplan, som ligeledes er symmetriplan for de på konstruktionen virkende kræfter.

Fremstillingen bygger på den givne teori for snitkræfter i bjælker i Knud P. Christiansen: Statisk bestemte bjælker [KC], og skal betragtes som et supplement til det anvendte uddrag af Mekanik 3.1 [M3.1].

I afsnit 6 behandles statisk bestemte søjler - Eulersøjler - der i store træk er hentet i Mekanik 3.2.

2. STATISKE BETINGELSER [SB]

Bjælken med understøtninger og systemlinien eller bjælkeaksen som x-akse forudsættes kendt fra [KC]. Det samme gør ligevægtsligningerne til bestemmelse af reaktioner og snitkræfter såvel som de nødvendige og tilstrækkelige betingelser for ligevægt mellem indre og ydre kræfter udtrykt ved differentiallyigningerne

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -p$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -p$$

Se også [KC] side 40.

3. FYSISKE BETINGELSER [FB]

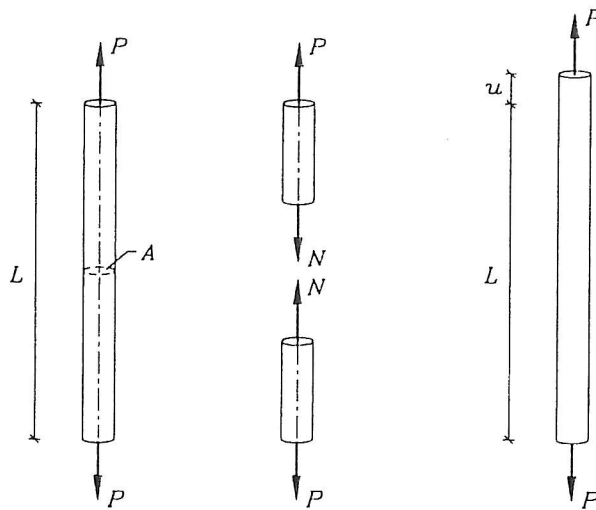
Spændings- og tøjningsbegrebet

I de bjælke- og stangsystemer, vi har arbejdet med hidindtil, har vi kun søgt reaktioner og snitkræfter. Snitkræfterne N , M og V har vi altid henført til konstruktionens systemlinie, men snitkræfter er jo egentlig kun resultanter af de kræfter, der virker på et tværsnits (normalsnits) delarealer. Se mere herom i [M3.1].

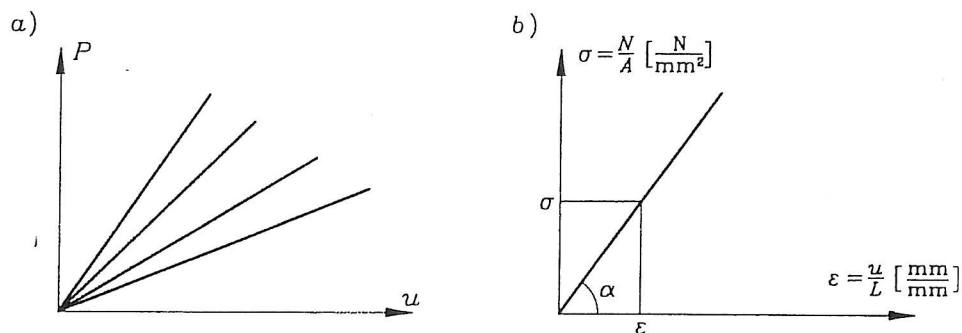
Hvilket *materiale* og hvilke *dimensioner* skal en bjælke udføres i, for at *styrken* er tilstrækkelig og *deformationerne* ikke bliver for store?

Lad os se på en stang med tværsnitsarealet A og længden L påvirket til rent træk med kraften P , dvs. $M = V = 0$. Se figur 3.1.

Ved projektion på bjælkeaksen fås hurtigt $N = P$.



Figur 3.1



Figur 3.2

Tænker vi os, at kraften egentlig vokser gradvis fra 0 til P , vil der tilsvarende gradvis ske en forlængelse u af stangen. Dette kan optegnes i et diagram. For samme materiale, men med forskellig geometri (A og L), fås forskellige kurver som vist på figur 3.2 a. Dette er upraktisk. Divideres derfor med henholdsvis tværsnitsareal A og begyndelseslængde L , kan fås en såkaldt arbejdskurve, der kun er materialeafhængig. Se figur 3.2 b. Her er:

$$\sigma = N/A = \text{spænding} \text{ [kraft pr. arealenhed, f.eks. } N/mm^2 = MPa]$$

$$\epsilon = u/L = \text{tøjning} \text{ [længdeændring pr. længdeenhed]}$$

Er arbejdskurven som vist en ret linie, og følger kurven samme linie tilbage, når kraften igen aftager fra P til 0, kaldes arbejdskurven for *lineærelastisk*.

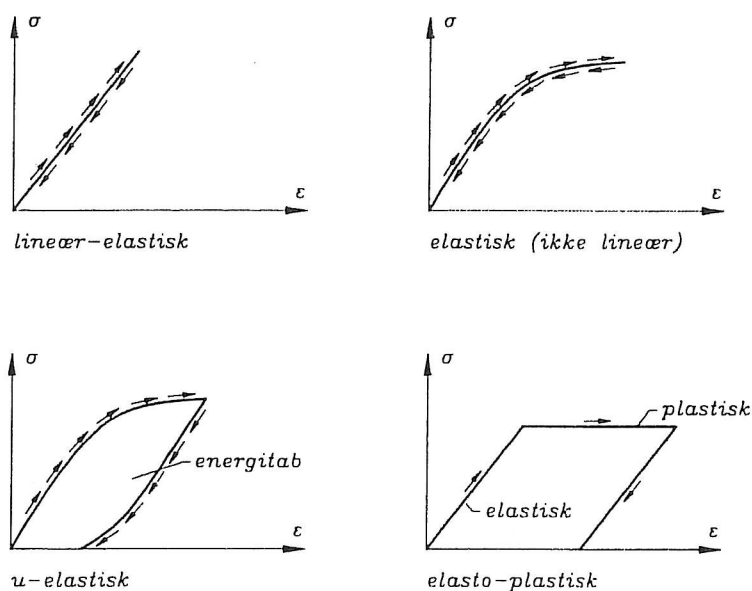
Arbejdskurvens hældningskoefficient kan fås af:

$$E = \sigma/\epsilon = \tan \alpha = \text{elasticitetskoefficienten} \text{ [f.eks. } N/mm^2]$$

Elasticitetskoefficienten siger direkte noget om et materiales stivhed. Det udtrykkes klart med kurvens ligning også kaldet *Hooks lov*:

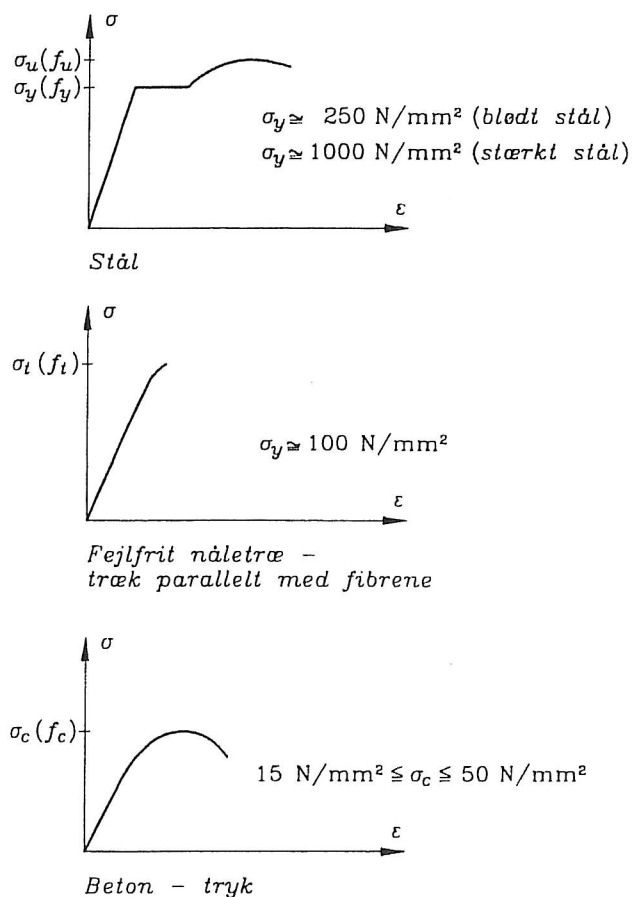
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Forskellige typer af arbejdskurver er vist i figur 3.3. Den viste pil på kurverne angiver hhv. belastning og aflastning.



Figur 3.3

Forskellige materialer giver forskellige arbejdskurver. Som eksempel er i figur 3.4 vist arbejdskurverne ved træk for materialerne stål og nåletræ samt for beton ved tryk.



Figur 3.4

Eksempel 3.1

En stålstang med $d = 16 \text{ mm}$ og $L = 2 \text{ m}$ påvirkes til rent træk med $P = 40 \text{ kN}$. Bestem normalspændingen og stangens forlængelse. $E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

$$A = \pi/4 \cdot d^2 = \pi/4 \cdot 16^2 = 200 \text{ mm}^2$$

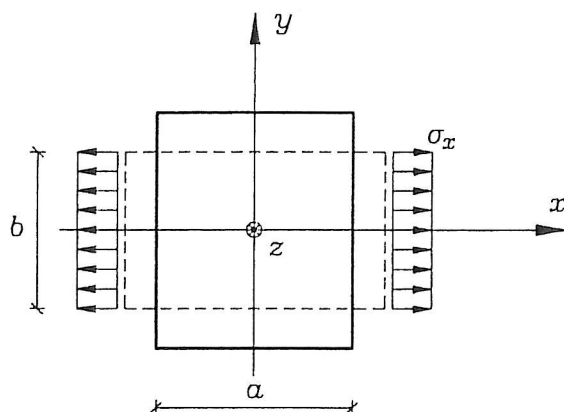
$$\sigma = P/A = 40000/200 = \underline{200 \text{ MPa}}$$

$$\varepsilon = \sigma/E = 200/2.0 \cdot 10^5 = 0,001 \Rightarrow 1 \text{ } ^0/_{\infty}$$

$$u = \varepsilon \cdot L = 0,001 \cdot 2000 = \underline{2 \text{ mm}}$$

Poissons forhold

I afsnittet om spændinger og tøjninger er det forudsat, at disse er jævnt fordelt over tværsnittet. Dette er ikke helt korrekt, bl.a. fordi der ses bort fra *tværtøjningernes* indvirkning. Lad os betragte et mere kompakt legeme med siderne a , b og c (c i z -aksens retning).



Figur 3.5

Påvirker vi nu legemet til træk i x -aksens retning, fås *længdetøjningen* ε_x . Samtidig fås en sammentrækning (*tværkontraktion*) i y - og z -aksens retning (der bliver jo ikke mere materiale ved, at vi trækker i det i x -aksens retning).

Disse tværtøjninger bliver:

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x \quad \text{og}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

hvor ν er *Poissons forhold*. For stål er $\nu \approx 0,3$.

At se bort fra tværtøjningen ved bjælker er selvfølgelig ikke korrekt, men resultaterne er anvendelige.

4. GEOMETRISKE BETINGELSER [GB]

I den her fremstillede bjælketeori forudsættes, at alle *flytningsgradienter*, dvs. tøjninger og vinkeldrejninger, er små.

Bjælketeoriens forudsætninger bygger endvidere på den antagelse, at et normalsnit i bjælken forbliver plant ved deformationen. Endelig forudsættes, at der ingen længdeændringer er i normalsnittets retning. Disse forudsætninger betegnes efter J. Bernoulli (1654-1705) som *Bernoullis forudsætninger*.

Forudsætningerne medfører, at løsninger kun kan tilfredsstille de korrekte ligninger i endog meget specielle tilfælde. Selv ved ren bøjning ($M = \text{konstant}$, $N = V = 0$) viser det sig, at der er længdeændringer i normalsnittenes retning på grund af tværkontraktionen (virkningen af Poissons forhold ν). Endvidere vil forskydningskræfterne deformere normalsnittene til S-form. Alligevel finder vi dog ganske brugbare løsninger.

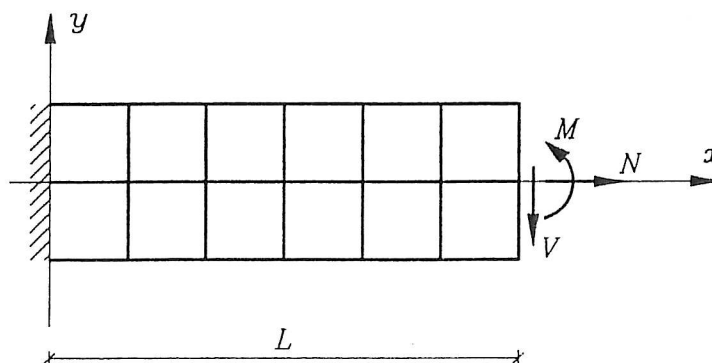
Flytninger og deformationer

Flytningen af et vilkårligt normalsnit vælger vi at karakterisere ved flytningerne w_x og w_y af systemliniens skæringspunkt med normalsnittet, hvor w_x og w_y er komponenterne efter akserne. Herefter bliver disse funktioner af x alene. Vinkeldrejningen af normalsnittet betegnes α_y og regnes positiv i x,y -planens positive omløbsretning. Størrelserne w_x , w_y og α_y betegnes *flytningsstørrelser*.

Ser vi derimod på ændringer af et delement f.eks. forlængelsen pr. længdeenhed ϵ , taler vi om deformationer. Vi har tilsvarende vinkeldrejningen κ pr. længdeenhed af et normalsnit som følge af deformation fra momentpåvirkningen, samt vinkelændringen ϕ af bjælkeaksen som følge af forskydningspåvirkningen. Størrelserne ϵ , κ og ϕ betegnes *deformationsstørrelser*.

Deformationsstørrelserne ϵ , κ og ϕ

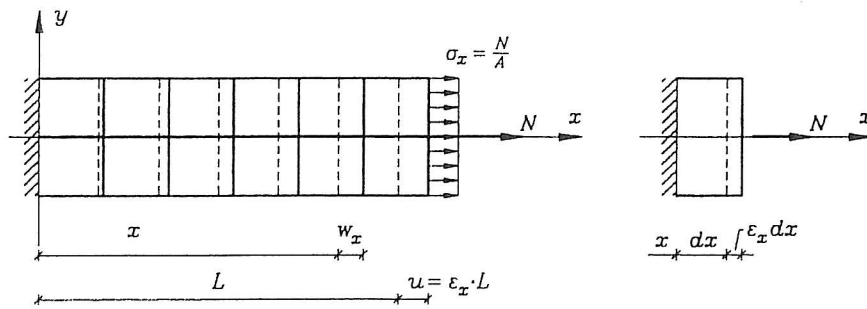
Lad os se på en indspændt bjælke inddelt i delementer og påvirket af snitkræfterne N , M og V . Se figur 4.1.



Figur 4.1

Med støtte i superpositionsloven tager vi een påvirkning ad gangen. Med ovennævnte forudsætninger fås da:

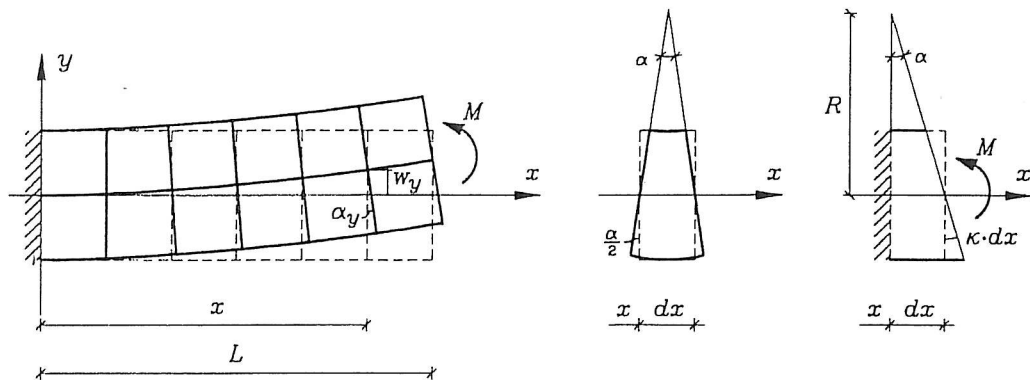
Påvirkning fra N



Figur 4.2

De enkelte delelementer bliver flyttet under påvirkning af N , men tager vi et enkelt delelement i afstanden x og med længden dx , bliver længdeændringen af delelementet $\epsilon_x \cdot dx$. Se figur 4.2.

Påvirkning fra M



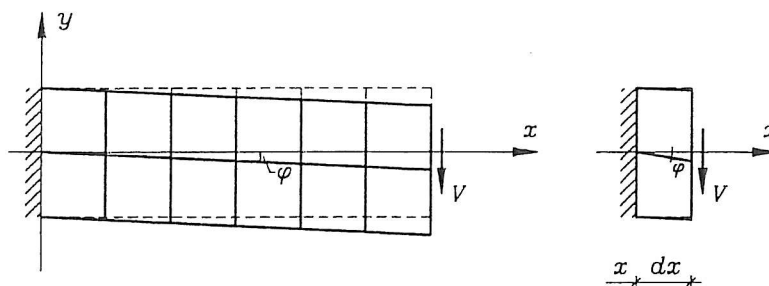
Figur 4.3

De enkelte delelementer bliver igen flyttet under påvirkning af M , se figur 4.3. Tager vi atter et enkelt delelement i afstanden x og med længden dx , kan ses, at deformationen bliver en vinkeldrejning af de 2 normalsnit. Den gensidige vinkeldrejning bliver α og radius i krumningscirklen R . Derfor fås:

$$\alpha = dx/R = 1/R \cdot dx = \kappa \cdot dx$$

hvor κ kaldes *krumningen*.

Påvirkning fra V



Figur 4.4

For fuldstændighedens skyld medtages bjælken og delementet påvirket af V . Vinkelændringen af systemlinien kaldes φ . Se figur 4.4.

De tre deformationsstørrelser bliver således:

$\varepsilon = \text{længdetøjning}$ (a.h.t. forenkling sættes $\varepsilon_x = \varepsilon$)

$\kappa = \text{krumning}$

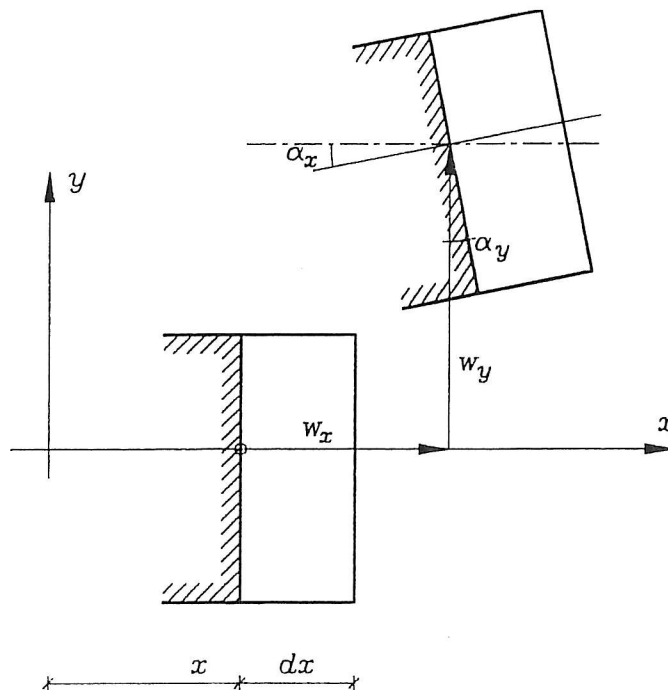
$\varphi = \text{vinkelændring}$

Flytningsstørrelserne w_x , w_y og α_y

Flytningsstørrelserne w_x , w_y og α_y for et givet normalsnit i afstanden x fremkommer egentlig ved en summation af deformationerne mellem 0 og x . På figur 4.2 ses dette for flytningen w_x i afstanden x . Tilsvarende kan på figur 4.3 ses flytningerne w_y og α_y i afstanden x .

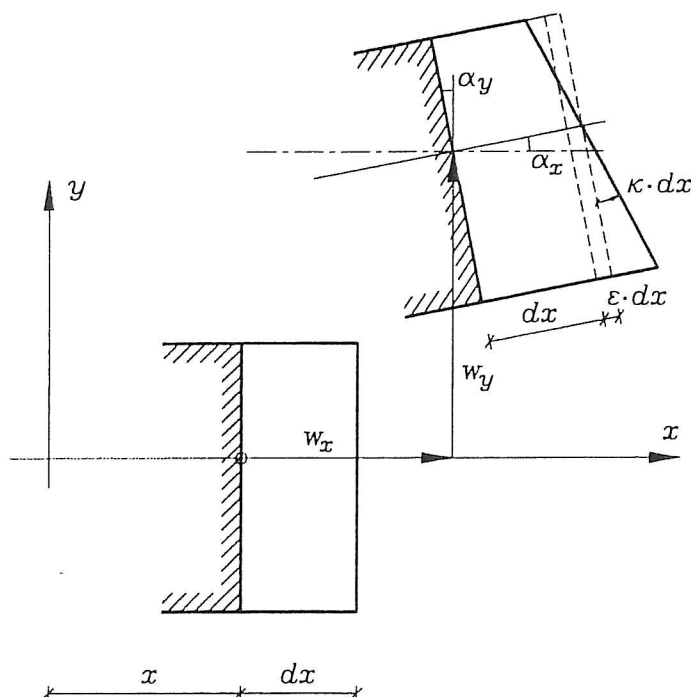
Alt dette er søgt anskueliggjort på efterfølgende figurer. Der medtages kun bidrag fra deformationsstørrelserne ε og κ .

På figur 4.5 flyttes delementet af længden dx som et stift legeme. Flytningerne w_x , w_y og α_y af normalsnittet i afstanden x ses umiddelbart.



Figur 4.5

På den efterfølgende figur 4.6 er tilføjet deformationerne ε og κ på delementet af længden dx . Altså et mere reelt billede af en flytningstilstand.



Figur 4.6

5. DIFFERENTIALLIGNINGER FOR FLYTNINGER

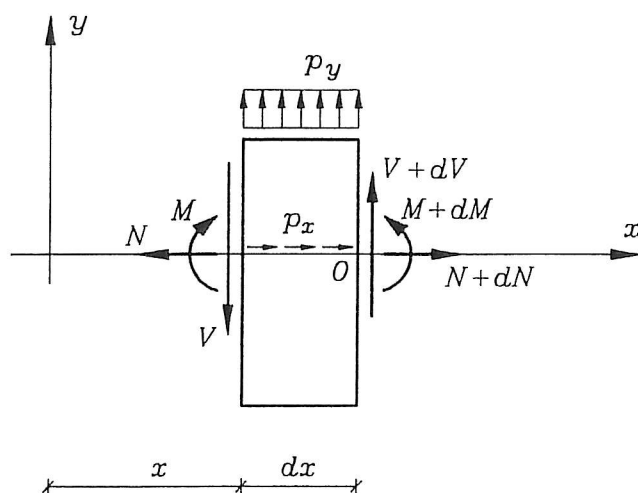
Til egentlig beregning af flytningsstørrelserne w_x , w_y og α_y og iøvrigt til løsning af statisk ubestemte konstruktioner findes forskellige metoder. Her kan nævnes *Differentialligninger for flytninger*, *Deformationsmetoden* og *Elementmetoden*. I dag, hvor man gør udstrakt brug af edb, er det *Elementmetoden*, programmerne bygger på. Det er dog nødvendigt på anden måde at finde frem til, hvor stift f.eks. et givet bjælkeelement er over for en ydre påvirkning. Lad os som eksempel se på bjælken AB i eksempel 5.1, side 12. Bjælken er fast indspændt i A og simpelt bevægelig understøttet i B. Lasten p er jævnt fordelt. Bjælken er statisk ubestemt. Der er 4 reaktionskomponenter M_A , R_{AV} , R_{AL} og R_{BL} . Altså én mere end antallet af ligevægtsligninger. Den overtallige f. eks. M_A kan så findes v. hj. af differentialligningerne. Herefter kan de resterende reaktioner bestemmes ud fra ligevægtsligningerne.

Før vi går igang med disse differentialligninger med henblik på edb, må vi sikre os, at vor fortegnsregning er i overensstemmelse med programmets. Som regel regner programmerne med et koordinatsystem, hvor y -aksen er orienteret opad. Lad os se, hvilken indvirkning dette kan have på de statiske betingelser.

5.1 Statiske betingelser [SB] - edb-orienteret

Fra figur 4.1 tager vi et delement i afstanden x , se figur 5.1. Delementet af længden dx påvirkes af laster og snitkræfter. Snitkræfterne N og V ved normalsnittet til højre orienteres nu

efter akserne, dvs. V vil "gå opad" i modsætning til tidligere. Tilsvarende regnes lasten p_y nu også positiv i y -aksens retning.



Figur 5.1

Ud fra vore ligevægtsligninger fås :

projektion på vandret: $-N + N + dN + p_x dx = 0$

$$\frac{dN}{dx} = -p_x$$

projektion på lodret: $-V + V + dV + p_y dx = 0$

$$\frac{dV}{dx} = -p_y$$

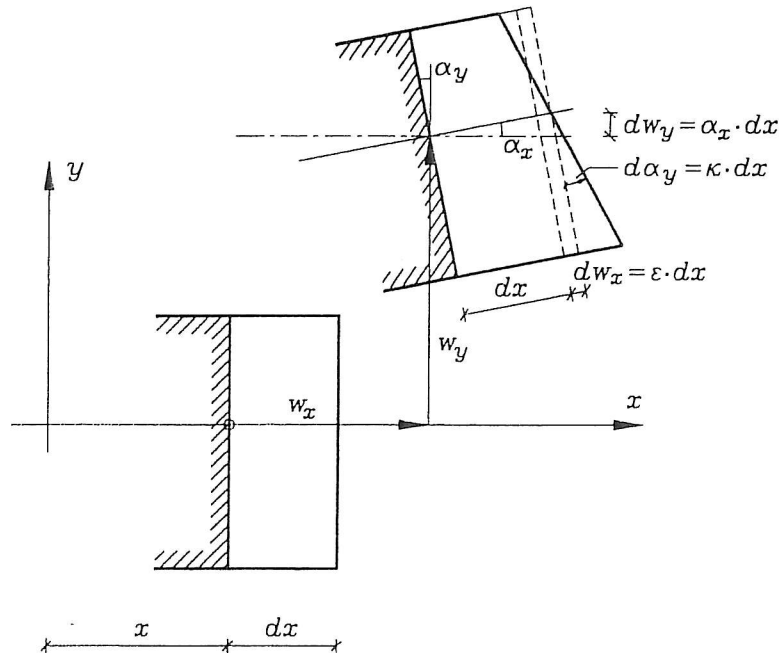
moment om O: $-M + M + dM + V dx - p_y dx \cdot \frac{1}{2} dx = 0$
med $dx \rightarrow 0$

$$\frac{dM}{dx} = -V \quad \text{hvoraf}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p_y$$

Altså et fortegnsskift på de 2 sidste udtryk, i forhold til fortegneregningen ved [KC], se også side 1.

5.2 Geometriske betingelser [GB]



Figur 5.2

Figur 5.2 er den samme som figur 4.6, blot er nu tilføjet tilvæksten til flytningerne w_x , w_y og α_y . Dvs. dw_x , dw_y og $d\alpha_y$.

Her fås altså, idet der ses bort fra forskydningsbidraget φ , hvorfor $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$:

$$\frac{dw_x}{dx} = \epsilon$$

$$\frac{dw_y}{dx} = \alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \kappa$$

heraf

$$\frac{d^2w_y}{dx^2} = \kappa$$

Hertil har vi fra [M 3.1] de konstitutive ligninger for lineærelastisk materiale deformationsstørrelserne ϵ og κ ifølge (3.23) og (3.24)

$$\epsilon = \frac{N}{EA}$$

$$\kappa = \frac{M}{EI_z}$$

Det ses tydeligt her, at deformationer og dermed flytninger er afhængige af det valgte materiales elasticitetsmodul E samt tværsnittetskonstanterne A og I_z . Med fx. voksende EA fås aftagende ϵ .

5.3 Differentialligninger for flytninger

Kombineres nu (SB) og (GB) med de konstitutive ligninger kan fås:

$$\frac{d^2 \left(\frac{M}{EI} \right)}{dx^2} = \frac{P_y}{EI} \Rightarrow \frac{d^4 w_y}{dx^4} = \frac{P_y}{EI}$$

$$\frac{d \left(\frac{M}{EI} \right)}{dx} = -\frac{V}{EI} = w_y''' = \frac{P_y}{EI} x + C_1$$

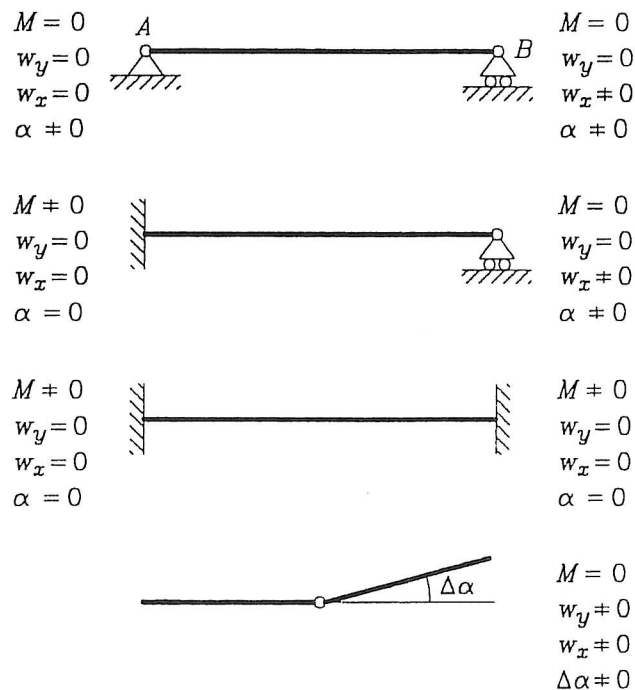
$$\kappa = \frac{M}{EI} = w_y'' = \frac{1}{2} \frac{P_y}{EI} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\alpha = w_y' = \frac{1}{6} \frac{P_y}{EI} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$w_y = \frac{1}{24} \frac{P_y}{EI} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

Hvor de 4 konstanter $C_1 - C_2 - C_3 - C_4$ bestemmes af randbetingelserne (RB) for den aktuelle bjælke/bjælkedel. Randbetingelserne for forskellige bjælketyper kan ses i figur 5.3.

Resultatet er to ligninger for snitkræfterne V og M , samt to ligninger for flytningerne α og w_y .

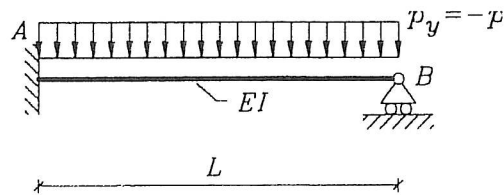


Figur 5.3 Randbetingelser for forskellige bjælketyper.

5.4 Anvendelse

Anvendelsen af disse differentialligninger belyses her med 3 eksempler. Alle med konstant EI.

Eksempel 5.1 - løsning af simpel *statisk ubestemt bjælke*:



Bestem for den viste bjælke reaktioner og snitkræfter samt den maksimale nedbøjning.

$$w_y''' = -\frac{P}{EI} \quad (1)$$

$$\left(-\frac{V}{EI}\right) = w_y'' = -\frac{P}{EI} x + C_1 \quad (2)$$

$$\left(\frac{M}{EI}\right) = w_y' = -\frac{1}{2} \frac{P}{EI} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

$$\alpha = w_y = -\frac{1}{6} \frac{P}{EI} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (4)$$

$$w_y = -\frac{1}{24} \frac{P}{EI} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (5)$$

RB: $x = 0, \alpha = w_y' = 0, w_y = 0, C_3 = C_4 = 0$
 $x = L, w_y = 0, w_y' EI = 0$

$$(3)EI \quad -1/2 pL^2 + C_1 EI L + C_2 EI = 0$$

$$(5)EI \quad -1/24 pL^4 + 1/6 C_1 EI L^3 + 1/2 C_2 EI L^2 = 0$$

$$(5)EI \cdot 6/L^2 \quad -1/4 pL^2 + C_1 EI L + 3C_2 EI = 0$$

$$-1/4 pL^2 - 2C_2 EI = 0$$

$$C_2 = -\frac{pL^2}{8EI}$$

$$-1/2 pL^2 + C_1 EI L - 1/8 pL^2 = 0$$

$$C_1 = \frac{5 pL}{8 EI}$$

De to ligninger for snitkræfterne bliver nu:

og $M = -1/2 px^2 + 5/8 pLx - 1/8 pL^2$
 $V = px - 5/8 pL$

$$\begin{array}{ll}
 \text{for} & x = 0 \Rightarrow M = -1/8 pL^2 \text{ og } V = -5/8 pL \\
 \text{for} & x = L \Rightarrow M = 0 \quad \text{og } V = 3/8 pL \\
 \text{og for} & V = 0 \Rightarrow x = 5/8 L \quad \text{og } M = 7/128 pL^2
 \end{array}$$

De to ligninger for flytninger bliver tilsvarende:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -\frac{1}{6} \frac{p}{EI} x^3 + \frac{5}{16} \frac{pL}{EI} x^2 - \frac{1}{8} \frac{pL^2}{EI} x \\
 w_y &= -\frac{1}{24} \frac{p}{EI} x^4 + \frac{5}{48} \frac{pL}{EI} x^3 - \frac{1}{16} \frac{pL^2}{EI} x^2
 \end{aligned}$$

Altså en ligning for vinkelændringen α og en for flytningen w_y . Skal vi bestemme den maksimale eller minimale flytning, må den findes, hvor $\alpha = 0$. Altså fås:

$$\alpha = 0 = -\frac{1}{6} \frac{p}{EI} x^3 + \frac{5}{16} \frac{pL}{EI} x^2 - \frac{1}{8} \frac{pL^2}{EI} x$$

ganges nu igennem med størrelsen $2EI/p$ fås:

$$x \left(-\frac{1}{3} x^2 + \frac{5}{8} Lx - \frac{1}{4} L^2 \right) = 0 \quad \text{hvoraf}$$

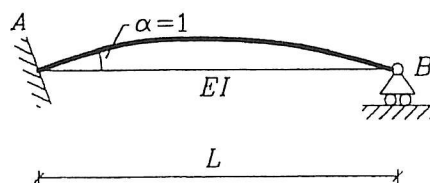
$$x = 0, \text{ og } x = 0,579 L$$

for $x = 0,579 L$ fås:

$$w_y = -0,0054 \frac{p}{EI} L^4$$

Ved brug af *elementmetode-programmer* er det nødvendigt at have kendskab til bjælkeelementernes *endestivheder*. Dvs. hvilke momenter og forskydningskræfter optræder der, når man giver en understøtning eller et knudepunkt en vinkeldrejning $\alpha = 1$ eller en flytning $w_y = 1$. Dette vil blive belyst i de sidste 2 eksempler.

Eksempel 5.2 - endestivheder:



Den viste bjælke påtvinges en vinkeldrejning i A på $\alpha = 1$. Bestem ligningen for momentet samt momentet i A, dvs. endestivheden i A for en vinkeldrejning på 1.

$$w_y''' = 0 \quad (p = 0)$$

$$\left(-\frac{V}{EI} \right) = w_y''' = C_1$$

$$\left(\frac{M}{EI}\right) = w_y'' = C_1 x + C_2$$

$$(\alpha) = w_y' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$w_y = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

RB:

$$x = 0, \quad \alpha = 1 \wedge w_y = 0 \Rightarrow C_3 = 1 \wedge C_4 = 0$$

$$x = L, \quad w_y = 0 \wedge M = 0$$

$$C_1 L + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1 L$$

$$\frac{1}{6} C_1 L^3 + \frac{1}{2} C_2 L^2 + 1L = 0$$

$$\frac{1}{6} C_1 L^3 - \frac{1}{2} C_1 L^3 + L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{3}{L^2}$$

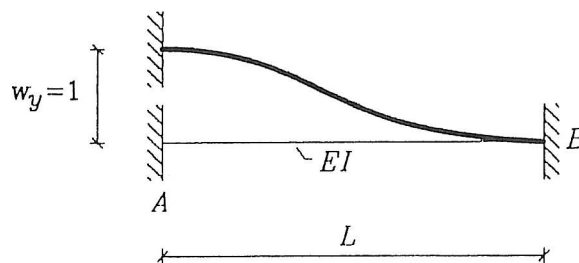
$$\text{og } C_2 = -\frac{3}{L}$$

$$M = \frac{3EI}{L^2} x - \frac{3EI}{L}$$

$$x = 0, \quad M = -\frac{3EI}{L}$$

$$x = L, \quad M = 0$$

Eksempel 5.3 - endestivheder:



Den viste bjælke AB, der er indspændt i begge ender, påtvinges en lodret flytning $w_y = 1$ i A. Bestem ligningen for momentet samt momenterne i A og B. De såkaldte endestivheder.

De 5 differentiaalligninger er de samme som i eksempel 2. Kun randbetingelserne er ændret. Der fås:

$$\text{RB:} \quad x = 0, \quad \alpha = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \text{ og } w_y = 1 \Rightarrow C_4 = 1$$

$$x = L, \quad \alpha = 0 \wedge w_y = 0$$

$$\frac{1}{2} C_1 L^2 + C_2 L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1 \frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{6} C_1 L^3 + \frac{1}{2} C_2 L^2 + 1 = 0$$

$$\frac{1}{6} C_1 L^3 - \frac{1}{4} C_1 L^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{12}{L^3}$$

$$M = \frac{12EI}{L^3} x - \frac{6EI}{L^2}$$

$$x = 0, \quad M = -\frac{6EI}{L^2}$$

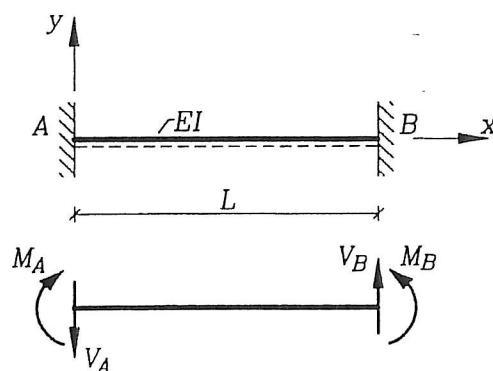
$$x = L, \quad M = \frac{6EI}{L^2}$$

$$x = \frac{L}{2}, \quad M = 0$$

**Tabel over ENDESTIVHEDER
for bjælkeelementer:**

ELEMENTTYPE:

FORTEGN FOR SNITKRÆFTER:
($N = 0$)



element med last	M_A	M_B	V_A	V_B
	$-\frac{1}{12} p L^2$	$-\frac{1}{12} p L^2$	$-\frac{1}{2} p L$	$\frac{1}{2} p L$
	$-\frac{1}{8} P L$	$-\frac{1}{8} P L$	$-\frac{1}{2} P$	$\frac{1}{2} P$
element med påtvungen flytning	M_A	M_B	V_A	V_B
	$-4 \frac{EI}{L}$	$2 \frac{EI}{L}$	$-6 \frac{EI}{L^2}$	$-6 \frac{EI}{L^2}$
	$-2 \frac{EI}{L}$	$4 \frac{EI}{L}$	$-6 \frac{EI}{L^2}$	$-6 \frac{EI}{L^2}$
	$-6 \frac{EI}{L^2}$	$6 \frac{EI}{L^2}$	$-12 \frac{EI}{L^3}$	$-12 \frac{EI}{L^3}$
	$6 \frac{EI}{L^2}$	$-6 \frac{EI}{L^2}$	$12 \frac{EI}{L^3}$	$12 \frac{EI}{L^3}$

6. STATISK BESTEMTE SØJLER

Ved opstilling af ligevægtsbetingelserne for deformerbare systemer kan man ofte se bort fra de flytninger, som de ydre kræfter giver anledning til, dvs. ligevægtsbetingelserne opstilles svarende til den udeformerede tilstand. Det er det, man oftest gør ved beregning af normalt forekommende statisk bestemte bjælkesystemer. For visse praktiske tilfælde er det imidlertid en meget dårlig tilnærmelse, og på den usikre side ved en bæreevnebestemmelse.

I det følgende skal det vises, hvorledes teorien for lige bjælker ændres, når man medtager virkningen af flytningerne, således at ligevægtsligningerne opstilles svarende til den deformerede tilstand. Vi vil dog stadig fastholde forudsætningen om små flytninger.

De omtalte virkninger af flytninger viser sig især at have stor betydning ved bjælker med tryknormalkræfter. Her optræder nogle fænomener, som man under ét plejer at betegne som *stabilitetsfænomener*, hvortil et par indledende betragtninger skal knyttes.



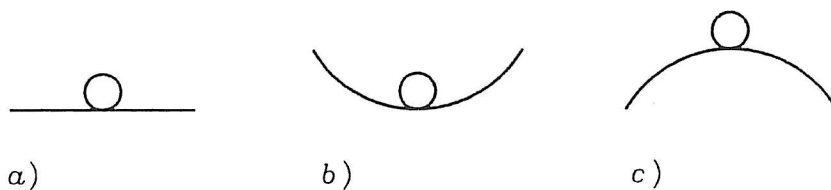
Figur 6.1 Den simpelt understøttede bjælke

Betragt en simpel understøttet lige bjælke, der i hvert tværsnit kun er påvirket af en central tryknormalkraft P , se figur 6.1. (Vi ser bort fra bjælkens egenvægt.) En sådan bjælke kaldes en *trykstang*. Vi kender den fra fx. gitterkonstruktioner. I det følgende vil vi også kalde den en *søjle*. Er søjlen udført af et materiale, der er lineærelastisk til brud, hvilket vi her forudsætter, vil det være nærliggende at tro, at bæreevnen af søjlen er lig med tværsnitsarealet ganget med trykbrudspændingen. Dette vil også være tilfældet, hvis søjlen forbliver ret og derfor centralt belastet til brud. Det viser sig imidlertid, at ved visse værdier af tryknormalkraften P er søjlens retliniede ligevægtsstilling ikke den eneste mulige. Der er også mulighed for ligevægt i en vis udbøjet stilling.

I dette tilfælde viser det sig, at der ikke skal udføres noget arbejde overhovedet for at flytte søjlen fra retliniet til udbøjet stilling. Søjlen siges at være i *labil ligevægt*.

En ligevægtsstilling, der kræver et positivt arbejde af ydre kræfter for at blive ændret ved enhver geometrisk mulig udbøjningsfigur, kaldes en *stabil ligevægtsstilling*.

Tilsvarende er en instabil eller ustabil ligevægt en ligevægtsstilling, der ved en eller flere geometrisk mulige udbøjningsfigurer kan afgive ydre arbejde.



Figur 6.2 viser a) labil ligevægt b) stabil ligevægt c) ustabil ligevægt

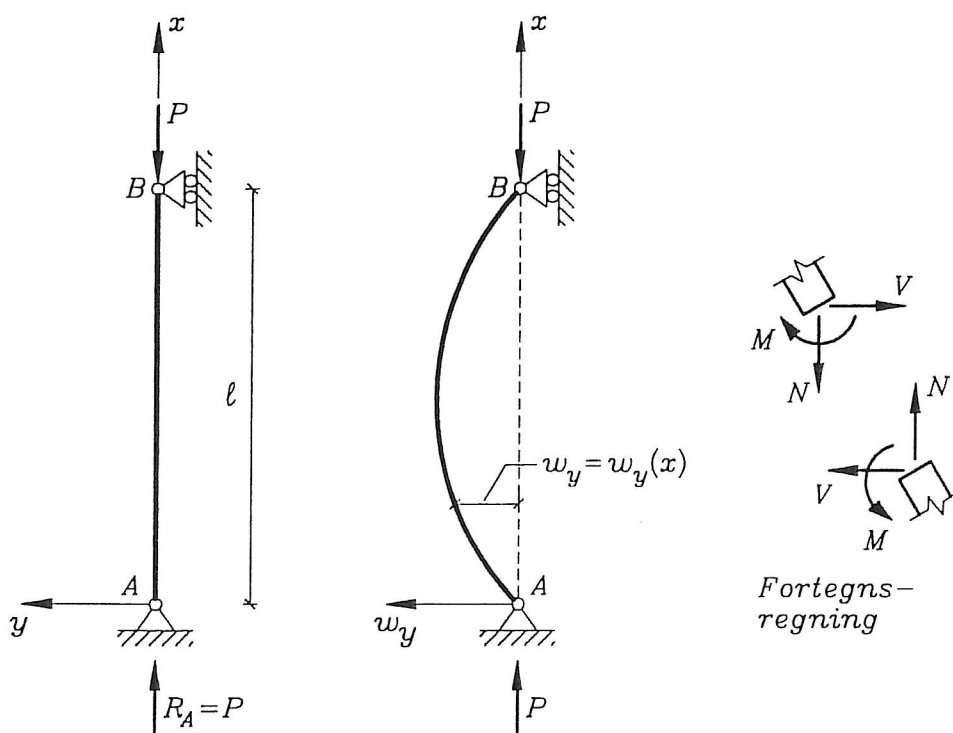
De 3 tilfælde er søgt anskueliggjort i figur 6.2 ved hjælp af en kugle. En kugle på en absolut plan og vandret flade er i *labil ligevægt*. Det kræver ikke nogen kraft at flytte kuglen vandret og

dermed ikke noget arbejde. Lægger vi derefter kuglen i en kugleformet skål, vil den, når den falder til ro, være i *stabil ligevægt*. Det vil kræve et ydre arbejde at flytte kuglen bort fra ligevægtsstillingen. Vender vi nu den kugleformede skål med bunden i vejret, kan vi med lidt held placere kuglen på toppen. Den vil nu være i en *ustabil ligevægtsstilling*. Der skal kun et lille pust til at få kuglen til at rulle ned. Den vil afgive et ydre arbejde.

Tilbage til søjlen. Den mindste normalkraft, der kan give ligevægt i udbøjet stilling, kaldes *den kritiske last eller den kritiske søjlekraft* for den pågældende søjle. Ved enhver kraft mindre end denne vil det kræve et positivt arbejde at fjerne søjlen fra den retliniede ligevægtsstilling. Søjlen er da stabil. Ved en last større end eller lig med den kritiske last gælder det, at hvis søjlen påvirkes af en nok så lille tværbelastning i et nok så lille tidsrum, vil den få accelerationer i tværbelastningens retning, og dens udbøjning vil vokse uden nogen yderligere påvirkning. Spændingerne i søjletværsnittet vil da hurtigt blive så store, at der til sidst sker brud i materialet. Et sådant brud kaldes et *stabilitetsbrud*, og er, set fra et ingeniørmæssigt synspunkt, en farlig brudform, fordi bruddet kan ske pludseligt uden varsel og ved en ganske lille forstyrrelse. Allerede i 1757 opstillede L. Euler et matematisk udtryk for den ideelle centralt belastede søjle. I det efterfølgende vil vi se nærmere på Eulers søjleformel for den centralt belastede søjle.

6.1 Den centralt belastede søjle, Eulers søjleformel

Lad os betragte den i figur 6.3 viste simpelt understøttede bjælke, der er belastet med en centralt virkende tryknormalkraft P ved den bevægelige understøtning B. Den lodrette reaktion ved den faste understøtning A bliver $R_A = P$, mens de vandrette reaktionskomponenter er nul. Den retliniede stilling er klart nok en mulig ligevægtsstilling, og i denne er snitkræfterne en normalkraft $N = -P$ i ethvert tværsnit.



Figur 6.3 Den simpelt understøttede søjle

I Eulers søjleformel forudsættes, at bjælkematerialet er homogent og lineærelastisk helt til brud, samt at bjælken har konstant tværsnit. Elasticitetskoefficienten for træk og tryk betegnes E . Der gøres yderligere den forudsætning, at der kun sker udbøjning i papirets plan, og at der ses bort fra vinkelændringer fra forskydningskraften, dvs. der regnes med, at det drejer sig om en Bernoullibjælke. Fortegnsregningen er som vist på figur 6.3. Endelig forudsættes, at bjælkeaksen er valgt som tyngdepunktslinie.

Vi undersøger nu, om andre ligevægtsstillinger end den retliniede er mulige. Vi betragter en udbøjningslinie karakteriseret ved flytningen $w_y(x)$ i y -aksens retning (flytning i x -aksens retning $w_x = 0$), og skal undersøge, om der eksisterer en udbøjet tilstand, i hvilken ligevægts-betingelserne er opfyldte. Reaktionerne bliver som ved den retliniede ligevægtstilling, men snitkræfterne M , N og V , hvor N og V har retninger, der er parallelle med henholdsvis x -aksen og y -aksen, bliver:

$$M = -Pw_y ; \quad N = -P ; \quad V = 0$$

Bemærk at N og V her ikke er komponenter vinkelret på henholdsvis parallel med normalsnittet som sædvanligvis brugt i bjælkeberegninger, men følger akseretningerne.

Betingelsen for, at udbøjningen $w_y(x)$ er en ligevægtsstilling, er i henhold til side 10:

$$\frac{d^2 w_y}{dx^2} = \kappa = \frac{M}{EI} \quad \text{indsættes nu } M \text{ fås:}$$

$$\frac{d^2 w_y}{dx^2} = -\frac{Pw_y}{EI},$$

der kaldes den simpelt understøttede søjles differentialligning. Når denne betingelse er opfyldt, er de andre ligevægtsligninger ovenfor også opfyldte.

Indføres nu betegnelsen

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \text{kan differentialligningen skrives som}$$

$$\frac{d^2 w_y}{dx^2} + k^2 w_y = 0,$$

som er en homogen differentialligning af 2. orden med konstante koefficienter. Karakterligningen bliver $R^2 + k^2 = 0$, som har løsningerne $R = \pm ik$.

Det fuldstændige integral kan da skrives på formen:

$$w_y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

hvor C_1 og C_2 er arbitrære konstanter, som bestemmes ud fra de geometriske randbetingelser.

For $x = 0$ er $w_y = 0 \Rightarrow$

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 0$$

Ligningen reduceres da til

$$w_y = C_1 \sin kx$$

For $x = \ell$ er $w_y = 0 \Rightarrow$

$$0 = C_1 \sin k\ell$$

Der kan tilfredsstilles på to måder:

Tilfælde a:

$$C_1 = 0 \text{ og } \sin k\ell \neq 0$$

Udbøjningslinien reduceres da til $w_y = 0$, hvilket vil sige, at søjlen er retliniet. Dette tilfælde er ret uinteressant, idet det blot viser, at søjlen kan være i ligevægt i retliniet tilstand.

Tilfælde b:

$$C_1 \neq 0 \text{ og } \sin k\ell = 0$$

$$\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = p \cdot \pi ; \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Indføres nu $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, fås:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = p \cdot \pi ; \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

svarende til

$$P = p^2 \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

$p = 0 \Rightarrow P = 0$, hvilket er uinteressant.

$$p = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = \pi \Rightarrow P = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

Dette viser, at søjlen kan være i ligevægt i udbøjet stilling, når den ydre last P er lig $\pi^2 EI / \ell^2$. Beregningen viser også, at dette er den mindste værdi for P , for hvilken en udbøjet ligevægts-tilstand eksisterer, så ifølge definitionen på den kritiske søjlekraft $P = P_{cr}$ har vi

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

Det ses, at hvis tværsnittet har forskellige inertimomenter om de to hovedakser, findes den mindste kritiske last ved udbøjning om akse med det mindste inertimoment.

Formlen benævnes *Eulers søjleformel*. Den kritiske søjlekraft benævnes i dette tilfælde som *Eulerkraften* eller *Eulers søjlekraft* for en simpelt understøttet søjle og betegnes derfor også P_E . Vi har altså

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

Søjle's udbøjningslinie (svarende til $p = 1$) har ligningen

$$w_y = C_1 \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

For $x = \ell/2$ ses, at $w_y = C_1$. Dvs. at den arbitrære konstant C_1 angiver udbøjningen på søjlens midtpunkt, og er ubestemt.

Søjlen kan altså, når lasten har værdien P_E , være i ligevægt i udbøjet stilling ved *enhver* sinusformet udbøjningslinje af ovennævnte form. Husk dog, at vi i starten forudsatte små flytninger (udbøjninger).

For en vilkårlig positiv, hel værdi af p ses, at søjlen kan være i ligevægt i udbøjet stilling, når

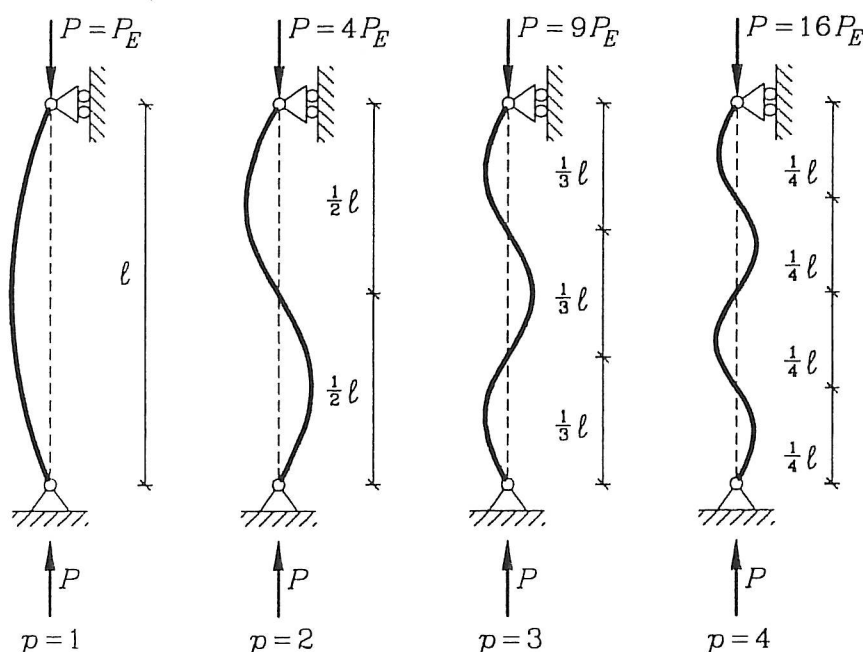
$$P = p^2 P_E = p^2 \frac{\pi^2 E I}{\ell^2} = \frac{\pi^2 E I}{\left(\frac{\ell}{p}\right)^2} \quad ; \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

med udbøjningslinier af formen

$$w_y = \sin \frac{p\pi x}{\ell} \quad ; \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

De værdier af k^2 , som tilfredsstiller betingelsen $\sin k\ell = 0$ og er forskellige fra nul, kaldes *egenværdier* for det foreliggende randværdiproblem, og de tilsvarende løsninger $w_y = w_y(x)$ benævnes *egenfunktioner*.

I figur 6.4 er udbøjningslinierne svarende til $p = 1, 2, 3, 4$ optegnet. Det ses, at p angiver antallet af «bugter» i udbøjningsfiguren.

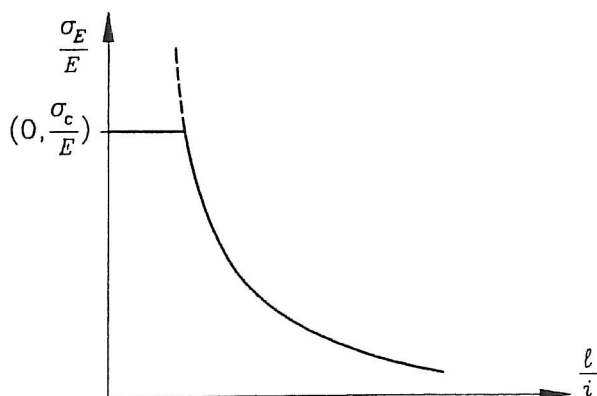


Figur 6.4 Udbøjningsfigurer for $p = 1, 2, 3$ og 4

Den til Eulerlasten svarende jævnt fordelte normalspænding σ_E bliver, idet A er tværsnitsarealet

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\ell}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Størrelsen $\lambda = \ell/i$ benævnes *slankhedsforholdet*, hvor $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$.

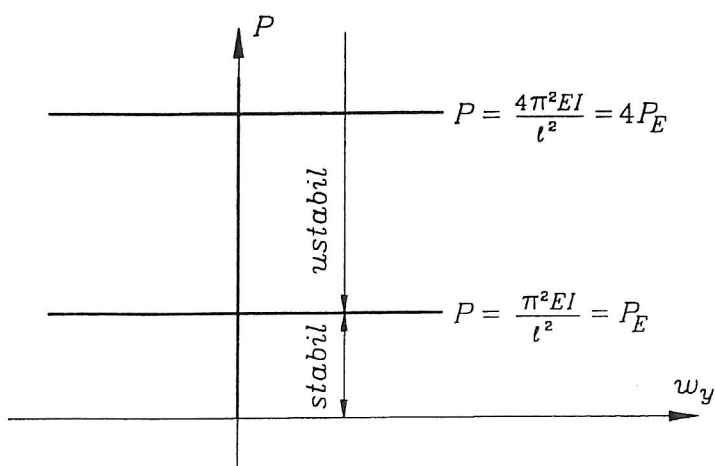


Figur 6.5 Eulers søjlekurve

I figur 6.5 er det principielle udseende af σ_E vist. Det kan ses at den kritiske last aftager stærkt med voksende slankhedsforhold, og at $\sigma_E \rightarrow 0$ for $\lambda \rightarrow \infty$. Løst sagt bærer slanke søjler mindre end tykke søjler.

Da normalspændingen i det øjeblik, udbøjning bliver mulig, ikke kan overskride brudspændingen σ_c ved rent tryk, foretages den angivne vandrette afskæring. For korte søjler vil der altså ske trykbrud i materialet, før ligevægt i udbøjet stilling bliver mulig. For disse søjler har søjlevirkningen derfor ingen betydning.

Afsættes sammenhørende værdier af kraft og udbøjning i de mulige ligevægtsstillinger i et koordinatsystem med kraften P som ordinat og søjlens udbøjning w_y fx. i midtpunktet som absisse, fås en række linier parallelle med udbøjningsaksen, se figur 6.6. Ordinaten til disse linier er bestemt ved $P = p^2 P_E$. For kræfter mellem de herved bestemte værdier er kun den retliniede ligevægtsstilling mulig. Søjlen er kun stabil i området svarende til $P < \pi^2 EI / \ell^2$.

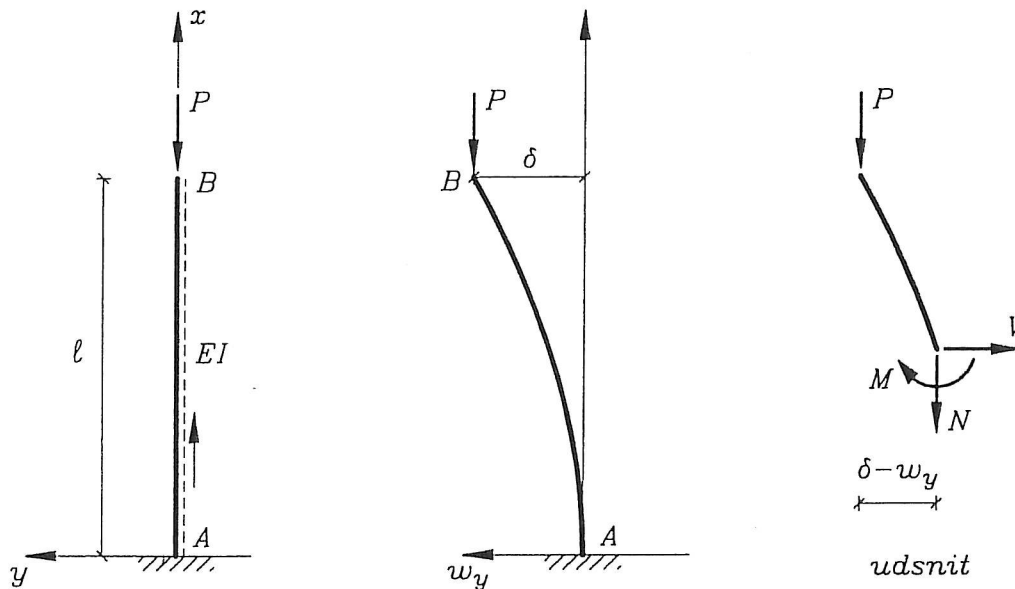


Figur 6.6 Vurdering af udbøjningsfigurerne i figur 6.4

Den i det foregående viste metode til bestemmelse af Eulerkraften for en simpelt understøttet søjle kan også benyttes på andre statisk bestemte søjler.

Eksempel 6.1

En lodret søjle med længden ℓ er fast indspændt ved A og fri ved B, hvor den centralt virkende enkeltkraft P angriber. Søjlematerialet er lineærelastisk til brud med elasticitetskoefficienten E for træk og tryk, og søjlens mindste inertimoment er I . Bestem Eulerlasten.



Figur 6.7 Den fast indspændte søjle

Vi forudsætter, at P er lodret også i udbøjet stilling. Betragtes nu den udbøjede søjle, med udbøjningen af punkt B lig δ , fås

$M = P(\delta - w_y)$ der indsat i differentiaalligningen giver

$$\frac{d^2 w_y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{P(\delta - w_y)}{EI} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 w_y}{dx^2} + \frac{P}{EI} w_y = \frac{P}{EI} \delta$$

Indføres igen $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, kan ligningen skrives som

$$\frac{d^2 w_y}{dx^2} + k^2 w_y = k^2 \delta$$

som har den fuldstændige løsning

$$w_y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta$$

Og dermed er

$$\frac{dw_y}{dx} = w'_y = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx$$

De geometriske randbetingelser giver

$$\text{For } x = 0 \quad w_y = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \delta = 0 \Rightarrow C_2 = -\delta$$

$$w_y = C_1 \sin kx + \delta (1 - \cos kx)$$

$$\text{For } x = 0 \text{ også } w'_y = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 \cdot k \cdot 1 - C_2 \cdot k \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (\text{da } k \neq 0)$$

$$w_y = \delta (1 - \cos kx)$$

$$\text{For } x = \ell \text{ er } w_y = \delta \Rightarrow$$

$$\delta (1 - \cos k\ell) = \delta \Rightarrow$$

$$\delta \cdot \cos k\ell = 0$$

For at få ikke-trivielle løsninger kræves altså, at

$$\cos k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = p \cdot \frac{\pi}{2} \quad ; \quad p = 1, 3, 5, \dots$$

$p = 1$ bestemmer P_E , dvs. vi har

$$\sqrt{\frac{P_E}{EI}} \ell = 1 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{4 \ell^2}$$

Den indspændte søjle har altså kun en fjerdedel af den bæreevne, en simpelt understøttet søjle med samme længde og bøjningsstivhed har.

6.2 Den fri søjlelængde

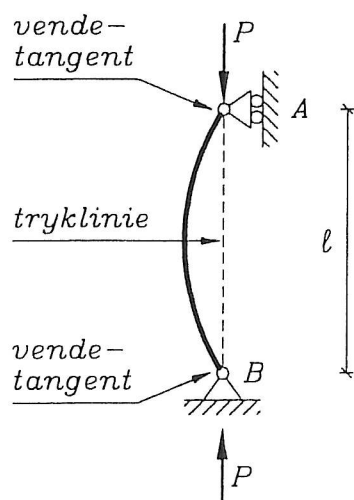
For søjler med *konstant tværsnit* og *konstant normalkraft* P defineres en regnestørrelse, som benævnes den *fri søjlelængde*. Omskrives søjlens Eulerlast P_E på formen

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{s^2}$$

er s nu søjlens fri søjlelængde.

Betragtes en simpelt understøttet søjle, se figur 6.8, fås for denne, idet $P_E = \pi^2 EI / \ell^2$, at $s = \ell$. Ved understøtningspunkterne A og B har *udbøjningslinien vendetangenter*. I dette tilfælde, hvor den såkaldte *tryklinie* er retliniet mellem udbøjningsliniens vendetangentpunkter, er den fri søjlelængde altså lig med afstanden mellem vendetangentpunkterne.

Generelt kan man sige, at for en vilkårlig søjle, hvor tryklinien forløber retliniet (altså uden knæk) mellem to på hinanden følgende vendetangentpunkter af udbøjningslinien, er afstanden mellem disse lig med den fri søjlelængde. Ved vendetangentpunkterne er nemlig $w''_y = 0$, og dermed $M = 0$, hvorfor man ved at opskrive søjlens differentiaalligning på den betragtede strækning får forhold, som er identiske med den simpelt understøttede søjle.



Figur 6.8 Tryklinie for simpelt understøttet søjle

Den fri søjlelængde kan i nogle tilfælde være et anskueligt hjælpemiddel til bestemmelse af Eulers søjlekraft P_E , idet man ud fra kendskabet til udbøjningsliniens form i nogle tilfælde kan angive den fri søjlelængde, og dermed P_E . Indeholder søjlens udbøjningslinie ikke vendetangentpunkter, tænkes søjlens udbøjningslinie fortsat ud over understøtningerne, indtil man kommer til et vendepunkt.

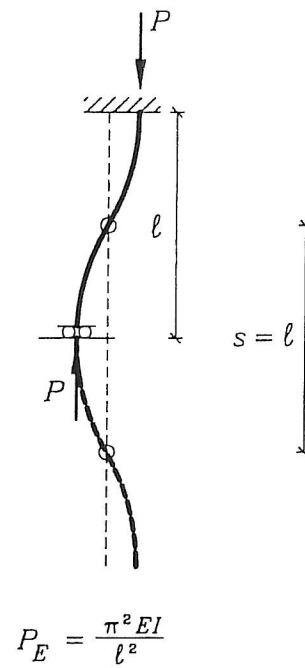
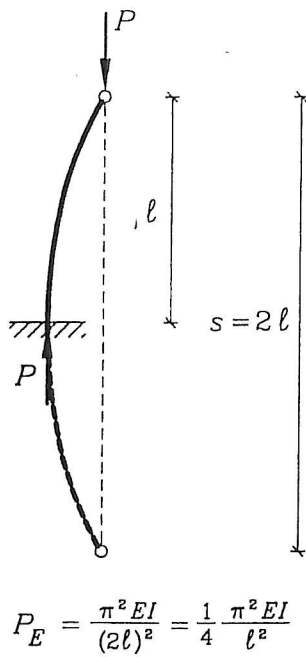
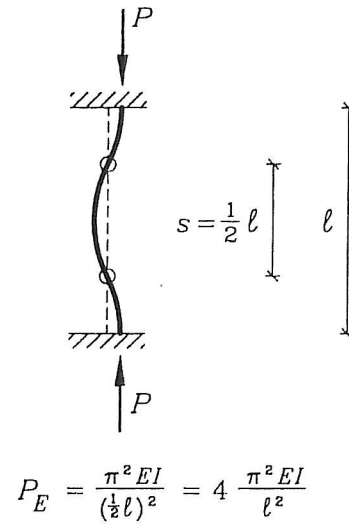
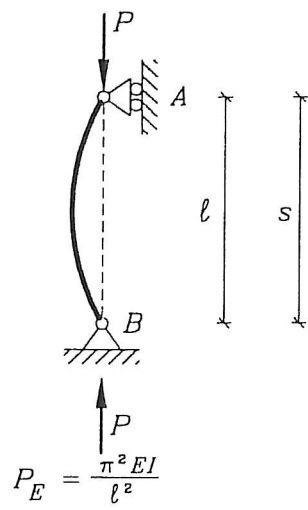
I figur 6.9 er for en række simple søjletilfælde angivet den fri søjlelængde s samt P_E . Vendetangentpunkterne er angivet med en lille cirkel.

I figur 6.10 er vist en søjle, hvor den fri søjlelængde ikke er lig med afstanden mellem udbøjningsliniens vendetangentpunkter, da tryklinien har et knæk ved punkt B.

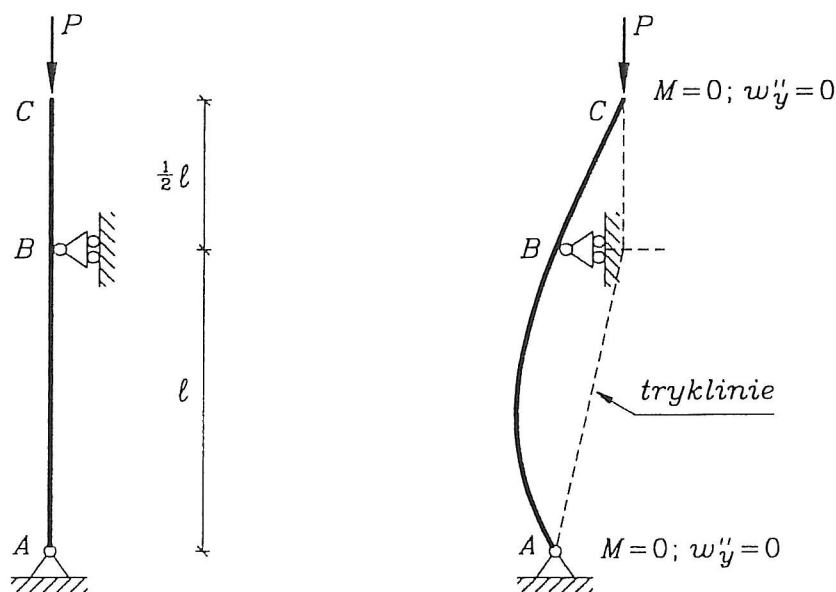
Afstanden mellem udbøjningsliniens vendetangentpunkter er $1,5 \ell$, mens søjlens kritiske last P_E kan beregnes til

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{(1,75 \ell)^2}$$

altså $s = 1,75 \ell$ og ikke $1,5 \ell$.



Figur 6.9 Fri søjlelængde for simple søjletilfælde



Figur 6.10 Søjle med knæk på tryklinien

6.3 Virkelige søjler

Den virkelige søjle udført af stål, træ eller beton opfører sig ret forskelligt fra Eulersøjlen. Normalt opstår der svigt som følge af udknækning, inden Eulerlasten nås. Forskellen fra den teoretiske Eulersøjle skyldes forskellige former for imperfektioner og brugen af ikke-lineære elastiske materialer i de virkelige søjler. Imperfektionerne skyldes forhåndskrumninger, egenspændinger, ekscentrisk påført last mv. Disse imperfektioner påvirker selvsagt udknækningsforløbet og dermed søjlens brudlast.

Fælles for de søjleudtryk, der anvendes for de forskellige materialer, er dog, at der tages udgangspunkt i Eulersøjlen.

